

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Ορισμός, σελίδα σχολικού βιβλίου 15.

β. i. Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο A .

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή g συμβολίζεται f^{-1} .

A2. Θεώρημα Fermat, σελίδα σχολ. βιβλίου 142.

A3. Θεώρημα, σελίδα σχολ. βιβλίου 135.

A4. α. Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

A4. β) Λάθος, Έστω η $f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1 \neq f(3)$

A5. γ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

B2. Έστω συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$, $x \in [2, 3]$.
 Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2, 3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) &= e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1 - e^3}{e^3} < 0 \end{aligned} \right\} g(2) \cdot g(3) < 0.$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς είναι 1-1 στο \mathbb{R} , οπότε η x_0 είναι μοναδική λύση στο \mathbb{R} .

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = -x \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$$

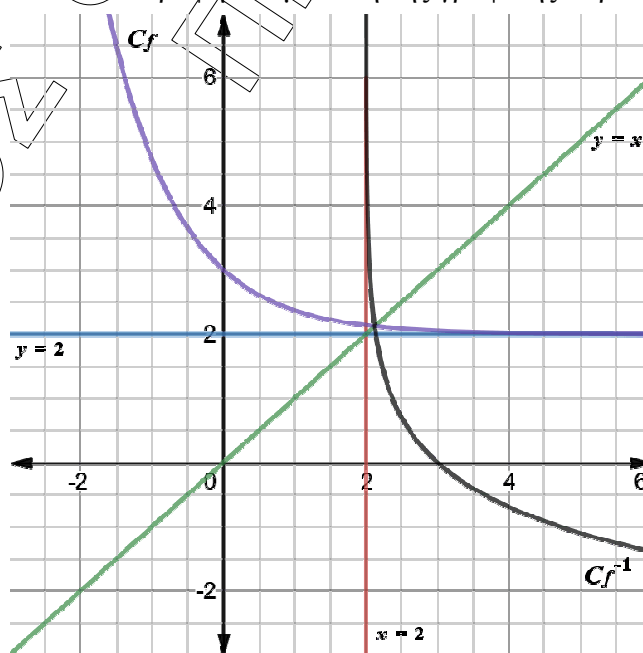
$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x > 2.$$

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = -\infty$, αφού εάν θέσουμε $x - 2 = u$ όταν $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty \quad \text{διότι}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty.$$

Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f .



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = \beta + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = 2$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, πρέπει $\beta + 1 = 2$, άρα $\beta = 1$, οπότε και $\alpha = 1$.

Γ2. Για $x > 1$, $f'(x) = 2x > 0$ (1)

για $x < 1$, $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ (2)

και f συνεχής στο 1. (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ3. i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Άρα υπάρχει $\kappa < 0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) < 0$ (1).

$$f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0 \quad (2).$$

Άρα από Θεώρημα Bolzano στο $[\kappa, 0]$, υπάρχει $x_0 \in (\kappa, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Η x_0 είναι μοναδική λόγω μονοτονίας της f .

ii. $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0$ (1)

Ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > x_0$, άρα η (1) στο $(x_0, +\infty)$ είναι ισοδύναμη με την

$$f(x) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x_0.$$

Η τελευταία είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ διότι f γνησίως αύξουσα, άρα

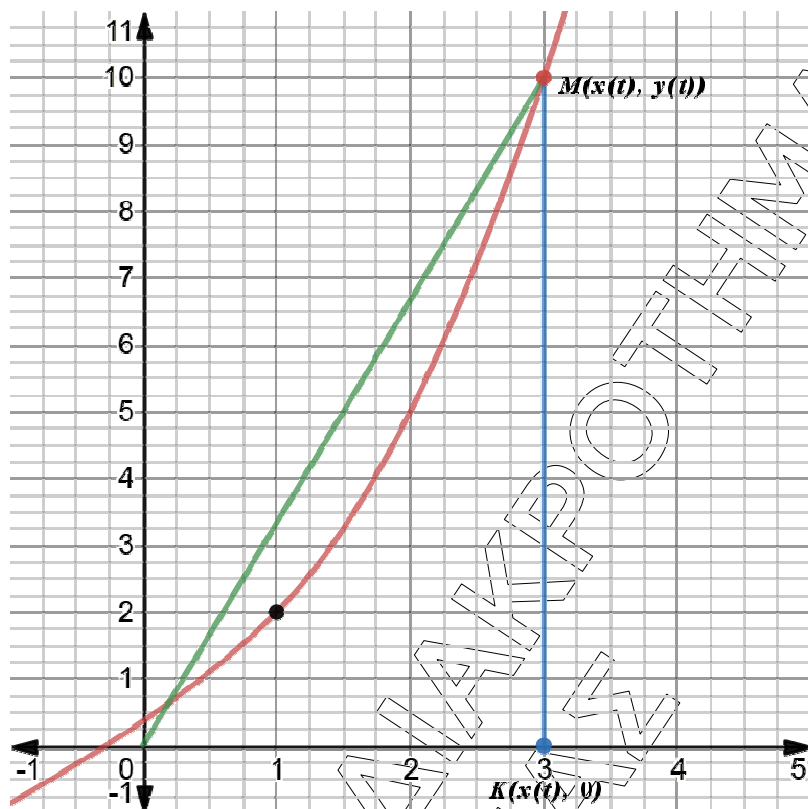
$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \text{ενώ } x_0 < 0.$$

Γ4. $M(x(t), y(t)) \Rightarrow y(t) = x^2(t) + 1$

$$x(t_0) = 3$$

$$y(t_0) = 10$$

$$x'(t_0) = 2$$



$$E(t) = \frac{1}{2}x(t)y(t) \Rightarrow$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)y(t) + \frac{1}{2}x(t)y'(t) \Rightarrow$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)y(t_0) + \frac{1}{2}x(t_0)y'(t_0).$$

$$\text{Ισχύει: } y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\text{Άρα } E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28 \text{ τμ/s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$$

$$\varepsilon: y = -x + 2$$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$f'(1) = -1$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -1} \quad \text{και} \quad \boxed{\beta = 2}$$

Δ2 $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$ Η f συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $[1, 2]$

$$E = \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)| dx =$$

$$= \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

όπου $(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

$$\text{Έστω } u = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow du = (2x - 2)dx \Leftrightarrow$$

$$du = 2(x-1)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} du = (x-1)dx$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow u_1 = 1$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow u_2 = 2$$

$$E = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 1 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2} (2 \ln 2) - \frac{1}{2} \cdot 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. i. Είναι $f'(x) = \ln \left[(x-1)^2 + 1 \right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

Προφανώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει

$$\ln \left[(x-1)^2 + 1 \right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0. \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 1, \text{ επομένως}$$

$$f'(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι για $\lambda \in \mathbb{R}$, $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda - \left(-2 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \quad (1)$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}. \text{ Όμως από } \Delta 3 \text{ (i),}$$

$$f'(\xi) \geq -1. \text{ Άρα } \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \text{ δηλαδή η}$$

(1).

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = -3x^2 - 1$.

Είναι:

- $f'(x_1) \geq -1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_1 = 1$ (από **Δ3.i**)
- $g'(x_2) \leq -1$, $x_2 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_2 = 0$

Οπότε $f'(x_1) > g'(x_2)$ για κάθε ζεύγος (x_1, x_2) με $(x_1, x_2) \neq (1, 0)$

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι $y = -x + 2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(0, 2)$ είναι $y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Άρα η ε μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία τους A, B αντίστοιχα.